

Marian Cucoaneș, Nicolae Seimeanu, Traian Tămîian

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a XII-a

[2011–2016]



enunțuri soluții

<i>Prefață</i>	7	
<i>Cuvânt-înainte</i>	8	
Partea I. ALGEBRĂ	9	51
Partea a II-a. ANALIZĂ MATEMATICĂ	23	94
INDEX	185	
Bibliografie	189	

1.1. Folosind descompunerea polinomului $x^2 + xy + y^2$ în corpul numerelor complexe, arătați că produsul a două numere din mulțimea

$$M = \{m^2 + mn + n^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

este de asemenea în M .

(S:L11.3.aprilie)

1.2. Arătați că se pot alege 4 elemente din \mathbb{Z}_7 astfel încât printre acestea să nu existe două distincte cu produsul $\hat{1}$, dar dacă alegem 5 elemente din \mathbb{Z}_7 la întâmplare, vor exista totdeauna două cu produsul $\hat{1}$.

(S:L11.7.aprilie)

1.3. Fie funcția $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{Z}_n$. Determinați toate valorile $n > 1$ pentru care f este bijectivă.

(S:L11.1.mai)

1.4. Fie G un grup cu 2011 elemente și H o submulțime nevidă a lui G . Știind că $\forall x, y \in H \Rightarrow xy \in H$, determinați $\text{card } H$.

(S:L11.2.mai)

1.5. Formula dezintegrării radioactive este $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$, unde N_t reprezintă numărul de nuclee radioactive la momentul t , N_0 reprezintă numărul de nuclee radioactive la momentul inițial și λ constanta de dezintegrare. Știind că cesiul are timpul de înjumătățire de 30 de ani, determinați λ (izotopul cesiu 137 este responsabil de radiațiile de la Cernobâl).

(S:L11.4.mai)

1.6. Dați exemplu de un grup (G, \cdot) cu elementul unitate e pentru care există un număr natural $n \geq 2$ cu proprietatea că ecuația $x^n = e$ are în G mai mult de n soluții.

(S:L11.1.iunie)

1.7. Determinați toate polinoamele, de grad cel mult doi, ireductibile în $\mathbb{Z}_3[X]$.

(S:L11.5.iunie)

1.8. Fie $c \in \mathbb{R}_+^*$ și $G = (-c, c)$. Definim pe G legea de compoziție „ \circ ” dată de

$$x \circ y = \frac{x+y}{1 + \frac{xy}{c^2}}$$

Arătați că (G, \circ) este grup abelian.

(S:L11.4.iunie)

1.9. Indicați trei numere complexe z_1, z_2, z_3 pentru care $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ iar $|z_1|, |z_2|, |z_3|$ sunt trei numere naturale consecutive.

(S:L11.4.octombrie)

1.10. Arătați că există o infinitate de perechi (a, b) cu $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $a^b \in \mathbb{Q}$.

(S:L11.6.octombrie)

1.11. Urmele lăsate la frânarea completă a unui automobil au arătat că frânarea s-a făcut pe o lungime de 120 metri. Se știe că decelerația automobilului a fost de 20 m/s^2 . Ce viteză avea automobilul înainte de frânare?

(S:L11.7.octombrie)

1.12. O minge este aruncată vertical de la sol cu viteza de 100 m/s . Care este înălțimea maximă la care ajunge? (Nu se consideră frecarea cu aerul).

(S:L11.8.octombrie)

1.13. Găsiți un număr natural x cuprins între 1 și 166 care să aibă proprietatea că $29x - 1$ este un multiplu al lui 167 (adică să se calculeze inversul lui $\widehat{29}$ în grupul multiplicativ \mathbb{Z}_{167}^*).

(S:L11.1.noiembrie)

1.14. Care este probabilitatea ca alegând două elemente $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$ suma lor să fie inversabilă.

(S:L11.7.noiembrie)

1.15. Arătați că mulțimea numerelor naturale de forma $n^2 + 7m^2$, $m, n \in \mathbb{Z}$ împreună cu operația de înmulțire formează un monoid. (Se poate folosi o descompunere în factori complecși.)

(S:L11.8.noiembrie)

1.16. Polinomul $f = aX^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ are toate rădăcinile reale și strict pozitive. Arătați că $b^2 \geq 3ac$.

Nicolae Bourbăcut și Ioan Șerdean, Orăștie (S:L11.3.decembrie)

1.17. Există o lege de compoziție „ $*$ ” pe \mathbb{R} cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$, avem $x < x * y < y$?

(S:L11.7.decembrie)

1.18. Rezolvați în \mathbb{Z}_{n^2+6n+6} ecuația $(n + \widehat{5})x = (n + \widehat{7})$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Ion Pistrilă, Oravița (S:L11.8.decembrie)

1.19. Care sunt subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}_{2012}, +)$?

(S:L12.2.ianuarie)

1.20. Este polinomul $p = X^4 + \widehat{1}$ ireductibil în corpul \mathbb{Z}_7 ?

(S:L12.4.ianuarie)

1.21. Care este probabilitatea ca într-o clasă cu 26 de elevi niciunul să nu fie născut în lunile decembrie sau ianuarie? Găsiți o modalitate de a calcula aproximativ acest număr, folosind faptul că pentru n suficient de mare $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este aproximativ „ e ” adică aproximativ 2,7.

(S:L12.6.ianuarie)

1.22. Notăm prin r , respectiv t , modulul și argumentul numărului complex $z = x + iy$. Care este ecuația în coordonate x, y din planul cartezian al relației $r = \cos t$?

(S:L12.7.ianuarie)

1.23. Ecranul unui computer este descris de mulțimea de pixeli $A = \{(n, m) \mid 1 \leq n, m \leq 2012\}$. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un pixel acesta să aibă componentele pătrate perfecte?

(S:L12.8.ianuarie)

1.24. Pe mulțimea \mathbb{Z} se consideră legile de compoziție definite prin: $x \circ y = x + y + a + 3b$ și $x \perp y = x + y - 2a + 6b$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Arătați că (\mathbb{Z}, \circ) și (\mathbb{Z}, \perp) sunt grupuri comutative.

b) Arătați că cele două grupuri sunt izomorfe.

Georgeta Burtea, Alexandria (S:L12.1.februarie)

1.25. Determinați suma coeficienților de ordin impar ai polinomului p' dacă

$$p(X) = X(X^2 - 1)(X^2 - 9)(X^2 - 16).$$

(S:L12.4.februarie)

1.26. Folosind eventual rădăcinile ecuației $z^2 - z + 2 = 0$ arătați că produsul a două numere ce pot fi scrise sub forma $n^2 - nm + 2m^2$, cu $n, m \in \mathbb{Z}$ este de aceeași formă.

(S:L12.7.februarie)

1.27. Fie grupul (G, \cdot) , $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ astfel încât $d \cdot c = b$, $b \cdot a = d$, $c \cdot a = e$, $b \cdot c = a$. Scrieți tabla de operații a acestui grup.

Dana Heuberger, Baia Mare (S:L12.2.martie)

1.28. Se consideră un grup multiplicativ (G, \cdot) în care are loc implicația

$$xy^2 = z^2x \Rightarrow y = z.$$

Demonstrați că G este grup abelian și $x^2 \neq e$, $\forall x \in G \setminus \{e\}$.

Tamara Pele, Sebiș, Arad (S:L12.2.aprilie)

1.29. Polinomul $f = X^{2012} + 2012$ are rădăcinile complexe z_k , $k = 1, 2, \dots, 2012$. Aflați valoarea expresiei:

$$S = \sum_{k=1}^{2012} \frac{1}{x_k - 1}.$$

(S:L12.9.aprilie)

1.30. Determinați o condiție necesară și suficientă pentru ca polinomul $f = X^3 + pX + q$, cu coeficienți reali să aibă toate rădăcinile reale și distincte. Reduceți la acest caz problema analoagă pentru polinomul cu coeficienți reali $g = X^3 + pX^2 + 2$.

(S:L12.10.aprilie)

1.31. Arătați că oricare ar fi două numere întregi neconsecutive există $n \geq 2$, număr natural, astfel încât ele să fie egale în \mathbb{Z}_n . Ce se întâmplă dacă sunt consecutive?

Romana Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj (S:L12.1.mai)

1.32. Care este cea mai mare valoare posibilă a determinantului unei matrice de ordin 3 cu elemente din \mathbb{Z}_3 ?

(S:L12.5.mai)

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} (1 - \cos nx) + \sin nx \leq \sqrt{3}$$

pentru orice număr natural n .

(S:L12.8.mai)

1.34. Calculați $\prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1}$, unde n este un număr natural nenul.

(S:L12.10.mai)

1.35. Fie P un polinom cu coeficienți întregi cu proprietatea că $P(x_i) = 1$ pentru cinci numere întregi distincte x_i . Putem avea $P(n) = 2012$ pentru un număr întreg n ?

(S:L12.4.septembrie)

1.36. Demonstrați că pentru orice $n \geq 1$, $\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n < 0,55$.

(S:L12.1.octombrie)

1.37. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale prime ecuația:

$$x^y + y^x + 13 = xyz.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești (S:L12.10.octombrie)

1.38. Folosind descompunerea polinomului $X^4 + 1$ în \mathbb{C} , arătați că produsul a două numere naturale ce se scriu ca sumă de două puteri a patra ale unor numere naturale, este de aceeași formă.

(S:L12.3.noiembrie)

1.39. Rezolvați în \mathbb{Z}_{11} sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = \hat{6} \\ \hat{3}x + \hat{2}y + \hat{4}z = \hat{8} \\ \hat{4}x + \hat{3}y + \hat{2}z = \hat{5} \end{cases}$$

Alexandra Dragomir, studentă, Sibiu (S:L12.1.decembrie)

1.40. Fie M mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Arătați că în M există o infinitate de elemente neutre la stânga și nici un element neutru la dreapta.

(S:L13.31)

1.41. Fie (M, \cdot) un monoid comutativ finit. Se notează cu a produsul elementelor lui M .

a) Arătați că dacă $x, y \in M$ și xy este simetrizabil, atunci x și y sunt simetrizabile.

b) Arătați că dacă a este simetrizabil, atunci M este grup.

(S:L13.32)

1.42. Fie p un polinom monic (cu coeficient dominant 1) cu coeficienți reali, de grad $n \geq 1$. Știind că pentru orice $k = 0, 1, \dots, n$ avem $p(k) = \frac{k}{k+1}$, determinați $p(n+1)$.

(S:L13.37)

1.43. Fie A un inel în care $a^2 = 0$ pentru orice $a \in A$. Arătați că $2abc = 0$ pentru orice $a, b, c \in A$.

Daniel Stoica, Canada (S:L13.75)

1.44. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât graficul ei conține trei puncte coliniare. Arătați că derivata a doua se anulează în cel puțin un punct.

Folclor matematic (S:L13.112)

1.45. Considerăm polinomul cu coeficienți complecși

$$f = aX^3 + bX^2 + cX + d, \quad b + c \neq 0, \quad a \neq 0,$$

cu toate rădăcinile de modul 1. Demonstrați că numărul $\frac{a+d}{b+c}$ este real.

Oana Turcu, București (S:L13.116)

1.46. Arătați că $f = (X^n - 3)^n - X - 3$ este reducibil în $\mathbb{Z}[X]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Aurel Doboșan, Lugoj (S:L13.152)

1.47. Dacă p este un număr prim, iar x, y, z numere întregi cu proprietatea că $p, x - y, y - z$ și $z - x$ sunt prime între ele două câte două, arătați că expresia:

$$E = (x - y)^p + (y - z)^p + (z - x)^p$$

se divide cu $p(x - y)(y - z)(z - x)$.

Ovidiu Buică, Ciocova (S:L13.155)

1.48. Se consideră polinomul

$$f \in \mathbb{C}[X], \quad f = X^{2n} + X^{2n-1} + \dots + X^2 + X + 1, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

cu rădăcinile $x_k, k = \overline{1, 2n}$. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+x_k} = 11$.

Carmen Olariu, Timișoara (S:L13.158)

1.49. Arătați că $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

(S:L13.233)

1.50. Arătați că, dacă matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifică relația

$$AB + BA = O_n,$$

atunci numărul natural nenul n este par.

(S:L13.234)

1.51. Scrieți numărul $(2^3 + 3^3 + 4^3 - 3 \cdot 24)^3$ sub forma $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, cu a, b, c numere naturale.

(S:L13.239)

1.52. Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5$. Calculați $A^n, n \in \mathbb{N}$.

(S:L13.312)

1.53. Pe mulțimea $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se definește operația $(a, b) * (c, d) = (ac + 5bd, ad + bc)$.

Fie mulțimea $S = \{(u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid u^2 - 5v^2 = 1\}$.

a) Calculați $(9, 4) * (9, 4) * \dots * (9, 4), n \geq 1.$

b) Arătați că S are o infinitate de elemente.

(S:L13.352)

1.54. a) Determinați $f: \mathbb{Z}_{31} \rightarrow \mathbb{Z}_{31}$ astfel că $f(x) + f(\hat{8}x) = \hat{23}x, \forall x \in \mathbb{Z}_{31}.$

b) Arătați că funcția astfel determinată este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_{31}, +).$

Gheorghe Alexe, Brăila (S:L13.356)

1.55. Pe \mathbb{R} se definește o lege de compoziție prin $x \circ y = xy - n(x + y) + n(n + 1), n \in \mathbb{N}^*,$ fixat. Notăm $x^{(k)} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_k, k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2.$ Atunci avem:

a) $x^{(2^p)} \geq n, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $(n + 1)^{(3)} + (n + 2)^{(3)} + \dots + (n + n)^{(3)} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 5)}{4}.$

c) Determinați părțile stabile finite ale lui $\mathbb{R},$ în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.

d) Determinați un subgrup propriu de două elemente ale grupului $(\mathbb{R} \setminus \{n\}, \circ).$

Gheorghe Alexe, Brăila (S:L13.358)

1.56. În orice grup $G,$ pentru $a, b \in G,$ ordinul elementului ab este egal cu ordinul elementului $ba?$

(S:L14.37)

1.57. Fie A un inel fără divizori ai lui zero. Dacă $a, b \in A$ sunt astfel încât $a^{2014} = b^{2014}$ și $a^3 = b^3$ atunci $a = b.$

(S:L14.39)

1.58. Fie polinomul $P(X) = X^3 + X + c \in \mathbb{Q}[X].$ Rezolvați ecuația $P(x) = 0,$ știind că două dintre rădăcinile ei verifică $x_1 + x_2 = x_1x_2.$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău (S:L14.72)

1.59. Demonstrați că polinomul $f(X) = X^2(X - 1)^2(X - 2)^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X].$

(S:L14.114)

1.60. Fie $M = \{2, 4, 8, 16\}$ și legea de compoziție

$$x \circ y = \begin{cases} y + |x - y|[\log_x y], & y \in \{2, 4\} \\ x - (x - y)[\log_y x], & y \in \{8, 16\} \end{cases}$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a.$ Arătați că mulțimea M este parte stabilă în raport cu operația de mai sus și stabiliți proprietățile acestei legi.

(S:L14.233)

1.61. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$

a) Calculați $(A^*)^*$ și $\det(A^*)^*.$

b) Dacă $A = A^t, \det A = 0$ și fiecare element din A are pătratul egal cu complementul său algebric demonstrați că $A = O_3.$

Gheorghe Alexe, Brăila (S:L14.237)

1.62. Fie $n \in \mathbb{N}$, fixat, și numerele reale $a, b, c \in [n-1, n+1]$. Demonstrați că

$$n^3 - 1 \leq a \cdot b \cdot c - n \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) + n^2 \cdot (a + b + c) \leq n^3 + 1.$$

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș (S:L14.274)

1.63. Fie o funcție bijectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $q \in \mathbb{R}$ cu $f(q) = 2$. Pe \mathbb{R} se definește legea de

compoziție „ \circ ” prin: $a \circ b = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - q)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție și simetricul lui $a \in \mathbb{R}$ în raport cu legea „ \circ ”.

b) Pentru $f(x) = x^3$, rezolvați ecuația: $x^2 \circ x = (6 - q)^3$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș (S:L14.275)

1.64. Fie G o mulțime nevidă, „ \cdot ” o lege de compoziție asociativă pe G , $a \in G$ și $f_a, g_a: G \rightarrow G$, două funcții definite prin: $f_a(x) = ax$, $g_a(x) = xa$, $\forall x \in G$. Arătați că (G, \cdot) este grup dacă și numai dacă f_a și g_a sunt surjective pentru orice $a \in G$.

(S:L14.280)

Profiturile investițiilor. Presupunem că peste t ani din momentul de față două planuri de investiție vor genera profituri de $P_1(t)$, respectiv $P_2(t)$, cu ratele de profitabilitate $P'_1(t)$ și $P'_2(t)$, ce satisfac $P'_1(t) \geq P'_2(t)$ pentru primii N ani ($0 \leq t \leq N$). Atunci $E(t) = P_2(t) - P_1(t)$ reprezintă profitul în exces al planului al doilea față de primul plan. Profitul net în exces este dat de

$$NE = E(N) - E(0) = \int_0^N E'(t) dt = \int_0^N [P'_2(t) - P'_1(t)] dt.$$

Peste t ani, o primă investiție va aduce un profit cu rata $P'_1(t) = t^2 + 30$ sute de euro pe an, în timp ce o a doua investiție va genera un profit cu rata de $P'_2(t) = 2t + 150$ sute de euro pe an.

1.65. Până când rata de profitabilitate a celei de-a doua investiții o va depăși pe cea a primei investiții?

(S:L14.318)

1.66. Se definește pe \mathbb{R} o lege de compoziție „ $*$ ” care satisface condițiile:

$$1) \left(\frac{a+1}{3}\right) * \left(\frac{a}{2}\right) = 1, \forall a \in \mathbb{R}; 2) (a * b) \cdot c = (a \cdot c) * (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Calculați $10 * 14$.

Lucian Dragomir, Oțelu Roșu (S:L14.356)

1.67. Dați un exemplu de lege de compoziție pe \mathbb{Q} cu elementul neutru $e = 0$ și pentru care $x = 1$ are simetricul în $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Iulia Cecon, Oțelu Roșu (S:L14.354)

1.68. Câte elemente are grupul multiplicativ $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ al matricelor de ordin 2 cu elemente în clasa de resturi modulo 3? Dar subgrupul matricelor ce au determinantul 1 modulo 3?

(S:L14.38)

1.69. Dacă operația binară $*$ definită pe $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ are proprietatea

$$(a * b) * c = a + b + c$$

pentru orice $a, b, c \in \mathbb{C}$, atunci $*$ coincide cu adunarea numerelor complexe.

George Stoica, Canada (S:L14.111)

1.70. Arătați că dacă într-un grup G avem: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall a, b \in G$, pentru trei valori consecutive ale lui $n \in \mathbb{N}^*$, atunci G este abelian.

(S:L14.113)

1.71. Arătați că un grup (G, \cdot) cu proprietatea că există $a, b \in G$ astfel încât

$$ab^2 = b^3a^2 \text{ și } b^4 = e$$

conține un subgrup izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Lucian Dragomir, Oțelu Roșu (S:L14.357)

1.72. Ecuația cu coeficienți complecși

$$x^n + a_1 \cdot x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0$$

are toate rădăcinile cu modulele egale cu r . Arătați că $r^2 \cdot |a_{n-1}| = |a_1 \cdot a_n|$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș (S:L14.277)

1.73. Pentru un grup G notăm cu $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \text{ pentru orice } y \in G\}$ (centrul grupului). Arătați că dacă $x, y \in G$ astfel încât $xy \in Z(G)$, atunci x și y comută.

(S:L16.159)

1.74. Arătați că în orice inel unitar A pentru $a, b \in A$, elementul $1 - ab$ este inversabil dacă și numai dacă $1 - ba$ este inversabil.

(S:L16.158)

1.75. Fie P un polinom cu coeficienți reali, cu toate rădăcinile x_1, x_2, x_3 simple și cu coeficient dominant 1, iar Q un polinom real de grad cel mult 2 cu coeficient dominant 1. Arătați că:

$$\frac{Q(x_1)}{P'(x_1)} + \frac{Q(x_2)}{P'(x_2)} + \frac{Q(x_3)}{P'(x_3)} = 1.$$

Generalizare.

Florin Rotaru, Focșani (S:L16.155)

1.76. Polinomul $f = X^5 + aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX - 120$ cu coeficienți raționali are rădăcini pozitive ce verifică relația

$$60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 12x_5 = 300.$$

Determinați coeficienții și rădăcinile.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș (S:L16.78)

1.77. Fie H un subgrup al unui grup G astfel încât $G \setminus H$ are 2010 elemente.

a) Arătați că G are cel mult 4020 elemente.

b) Construiți un astfel de grup cu numărul maximal de elemente.

Florin Antohe, Galați (S:L16.79)

1.78. Fie K un corp și $f: K^* \rightarrow K^*$ o funcție cu proprietatea $f(f(x)) = x^{-1}$, pentru orice $x \in K^*$ și $f(1) \neq 1$. Știind că ecuația $f(x)^2 - f(x) + 1 = 0$ are soluție unică în K^* , determinați $f(2)$.

Petru Todor, Sebeș (S:L16.38)

1.79. Fie A un inel finit în care numărul elementelor inversabile este același cu numărul elementelor nilpotente. Arătați că dacă $x \in A$ este inversabil, atunci $1 - x$ este nilpotent.

Eugen Radu, București (S:L16.39)

1.80. Determinați polinoamele $f(X)$ cu coeficienți reali, care verifică relația

$$f(X+1) - 2f(X) + f(X-1) = 6X.$$

Eugen Radu, București (S:L16.40)

1.81. Fie (G, \cdot) un grup finit de ordin n , $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că orice element al grupului este cub perfect dacă și numai dacă n nu este multiplu de 3. (Notă: $x \in G$ este cub perfect dacă există $y \in G$ astfel încât $y^3 = x$.)

Luigi Catană, student, Potcoava (S:L15.357)

1.82. Fie $G = (1, \infty)$. Determinați numerele reale a, b, c pentru care G este grup în raport cu legea de compoziție

$$x * y = xy + ax + by + c.$$

Eduard Buzdugan, Slatina (S:L15.351)

1.83. Fie $G = \{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{C}, u \neq 0\}$ și $\phi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ o funcție cu proprietatea că legea de compoziție „ \circ ” definită pe G prin

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d \cdot \phi(a))$$

este asociativă.

a) Demonstrați că (G, \circ) este grup.

b) Determinați funcția ϕ pentru care (G, \circ) este grup abelian.

Marius Perianu, Slatina (S:L15.356)

1.84. Fie G un grup finit cu $n \in \mathbb{N}^*$ elemente unde n nu este multiplu de 4. Dacă există $a, b \in G \setminus \{e\}$, distincte astfel încât $a^2 = b^2 = e$, arătați că G nu poate fi abelian.

Aurel Doboșan, Lugoj (S:L15.313)

1.85. Fie (G, \cdot) un grup cu 55 de elemente ce are un subgrup H cu 5 elemente și cu proprietatea că oricare ar fi $x \in G, y \in H$ avem $xyx^{-1} \in H$. Arătați că H este ciclic.

Petru Todor, Sebeș (S:L15.312)

1.86. Fie A un inel $a, b \in A$ care nu sunt unitatea, astfel încât pentru o valoare $p \geq 1$ avem $b^{3p} = 1$ și $ab = b^{2p}a$. Arătați că $b^3 = 1$ și a comută cu b dacă și numai dacă $3 \mid p - 2$.

Nicolae Papacu, Slobozia (S:L15.316)

1.87. Fie G un grup de ordin 2015 și $x \in G$ astfel încât ordinul lui x^5 este 13 iar ordinul lui x^{13} este 5. Care este ordinul lui x ?

Gheorghe Alexe și George-Florin Șerban, Brăila (S:L16.191)

1.88. Fie H un subgrup al unui grup G astfel încât $G \setminus H$ are 2010 elemente.

a) Arătați că G are cel mult 4020 elemente.

b) Construiți un exemplu de subgrup H , cu 2010 elemente, al unui grup cu exact 4020 elemente.

Florin Antohe, Galați (S:L16.199)

1.89. Fie (G, \cdot) un grup în care există x, y astfel încât $x^5 = e$ și $x \cdot y \cdot x^{-1} = y^2$. Arătați că $y^{31} = e$.

Dan Ion, Brăila (S:L15.279)

1.90. Fie (G, \cdot) un grup. Presupunem că există $f: G \rightarrow G$ injectivă astfel încât

$$x \cdot f(x^{2015} \cdot f(y)) = x^{2015} \cdot f(xy),$$

oricare ar fi $x, y \in G$. Demonstrați că G este grup abelian.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila (S:L15.275)

1.91. Fie $A = \left[0, \frac{1}{2^{2015}} \right]$ și $x \circ y = x + y - 2^{2016}xy$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că (A, \circ) este monoid comutativ.

b) Determinați toate părțile stabile G ale lui A în raport cu legea dată astfel încât (G, \circ) să fie grup.

(S:L15.273)

1.92. Fie mulțimea $M = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ are primitive și } f^2(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că (M, \circ) este monoid necomutativ cu 4 elemente („ \circ ” este compunerea funcțiilor).

b) Determinați mulțimea $\left\{ \int f(x)dx \mid f \in M \right\}$.

Dan Negulescu, Brăila (S:L15.277)

1.93. Fie $(G, *)$ unde $G = (-k, k)$, $k > 0$ și $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2 + xy}$, $\forall x, y \in G$. Arătați că:

a) $(G, *)$ este grup abelian;

b) $\frac{k}{3} * \frac{k}{5} * \dots * \frac{k}{2n+1} < \frac{k}{2} * \frac{k}{4} * \dots * \frac{k}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Alexe, Brăila (S:L15.278)

1.94. Fie $G = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $H_1 = \{A \in G \mid A^t = A\}$, $H_2 = \{A \in G \mid A^t = -A\}$,

$\lambda \in \mathbb{C}$ și $H = \left\{ A = (a_{kl}) \in G \mid \sum_{k,l=1}^n a_{kl} = \lambda \right\}$. Arătați că:

a) H_1 și H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(G, +)$ și $\forall A \in G$, $\exists X_1 \in H_1$ și $X_2 \in H_2$ unice, astfel încât $A = X_1 + X_2$;

b) H este subgrup al grupului $(G, +) \Leftrightarrow \lambda = 0$;

c) Pentru $\lambda \neq 0$ există pe H o lege de compoziție „ $*$ ” astfel încât $(H, *)$ este grup abelian.

Dan Negulescu, Brăila (S:L15.274)

1.95. Fie (G, \cdot) un grup finit și $x \in G$. Arătați că dacă există $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu n par, $(m, n) = 1$ astfel încât $\text{ord}(x^m) = n + 2$ și $\text{ord}(x^n) = 2m + 1$ atunci $6 \mid \text{ord}(G)$.

Dana Heuberger, Baia Mare (S:L15.235)

1.96. Fie $p \geq 3$ un număr prim. Arătați că

$$\left(A_{2p}^{2p} - 2p^2 \right) \cdot \left(A_{2p+1}^{2p} - 2p^2 \right) \cdot \dots \cdot \left(A_{3p-1}^{2p} - 2p^2 \right) \div p^{3p} \cdot 2^p.$$

Dana Heuberger, Baia Mare (S:L15.234)

1.97. Descompuneți în factori ireductibili peste \mathbb{C} polinomul:

$$f = X^4 - 3(1+i)X^3 + 7iX^2 + 10(1-i)X - 50.$$

(S:L15.197)